Analyse

Lieve Houwaer

1. Relaties, functies, afbeeldingen, bijecties

Voor niet-ledige verzamelingen A en B noemen we elke deelverzameling van de productverzameling A x B een <u>relatie</u> van A naar B.

We noemen dom R = $\{x \mid (x, y) \in R\}$ het domein van de relatie R en bld R = $\{y \mid (x, y) \in R\}$ het beeld van de relatie R.

Keert men de volgorde van de koppels van een relatie om, dan ontstaat een relatie van B naar A, de zgn. <u>inverse relatie.</u>

Een <u>functie</u> van A naar B is een relatie van A naar B waarbij elk element van A hoogstens 1 beeld heeft.

Een functie van A naar B noemt men een <u>afbeelding</u> van A in B als dom f = A.

Een afbeelding van A in B noemt men een <u>bijectie</u> van A op B als de inverse relatie eveneens een afbeelding is.

2. Uitgebreide verzameling der reële getallen: $\overline{\mathbb{R}}$

De verzameling der reële getallen $\mathbb{R}$, aangevuld met de elementen - ∞ en + ∞ , noemt men de <u>uitgebreide verzameling der reële getallen</u>.

Notatie: $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

• De <u>totale orde</u> wordt als volgt uitgebreid:

$$\forall x \in \mathbb{R}: -\infty < x < +\infty$$

• De bewerkingen worden als volgt uitgebreid:

1) $\forall x \in \mathbb{R}: x + (-\infty) = -\infty = (-\infty) + x$

$$x + (+\infty) = +\infty = (+\infty) + x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_0^+: x.(+\infty) = +\infty = (+\infty).x$$

$$x.(-\infty) = -\infty = (-\infty).x$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_0^-: x.(+\infty) = -\infty = (+\infty).x$$

$$x.(-\infty) = +\infty = (-\infty).x$$

2) $\begin{cases} (+\infty) + (+\infty) = +\infty \\ (-\infty) + (-\infty) = -\infty \end{cases}$

$$\begin{cases} (-\infty).(+\infty) = -\infty = (+\infty).(-\infty) \\ (+\infty).(+\infty) = +\infty = (-\infty).(-\infty) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sqrt[n]{+\infty} = +\infty \\ \sqrt[n]{-\infty} = -\infty \text{ als n oneven is.} \end{cases}$$

$$\frac{1}{+\infty} = 0 \qquad \frac{1}{-\infty} = 0$$

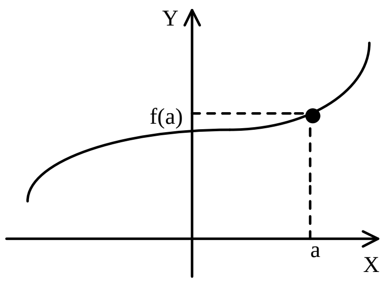
Dus de volgende uitdrukkingen hebben geen betekenis, zijn ONBEPAALDHEDEN:

$$(+\infty) + (-\infty);\ (-\infty) + (+\infty);\ 0.+\infty;\ +\infty.0;\ 0.-\infty;\ -\infty.0;\ \frac{+\infty}{+\infty};\ \frac{+\infty}{-\infty};\ \frac{-\infty}{+\infty};\ \frac{-\infty}{-\infty}$$

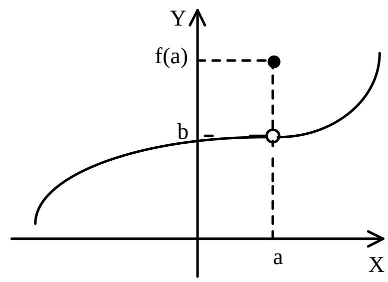
3. Continuïteit van een functie in IR

3.1. Voorbeelden

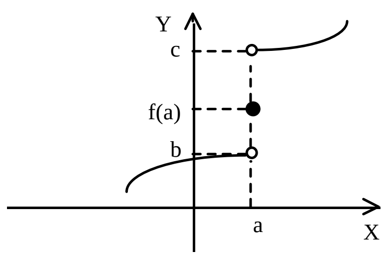
Stel f: IR $\rightarrow$ IR en a $\in$ dom f dan zegt men:



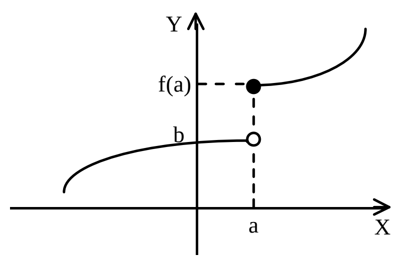
f is continu in a



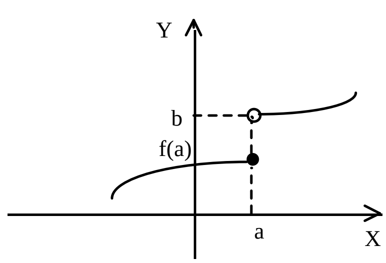
f is discontinu in a
f is niet linkscontinu in a
f is niet rechtscontinu in a



f is discontinu in a
f is niet linkscontinu in a
f is niet rechtscontinu in a



f is discontinu in a
f is rechtscontinu in a



f is discontinu in a
f is linkscontinu in a

3.2. ε – δ - definitie

Beschouw een functie $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en onderstel dat $a \in \text{dom } f$ dan zegt men:

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{f is continu in a} \\ \Updownarrow \\ \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \quad |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon \end{array}}$$

Verder geldt:

f is rechtscontinu in a $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: x \in [a, a + \delta[\Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$
f is linkscontinu in a $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: x \in]a - \delta, a] \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

4. limiet van een functie in IR

4.1. Voorbeelden

"via het begrip limiet, discontinuïteiten opheffen"

stel $a \in \text{adh dom } f$.
als f continu is in a dan $\lim_a f(x) = f(a)$
als f discontinu is in a dan:

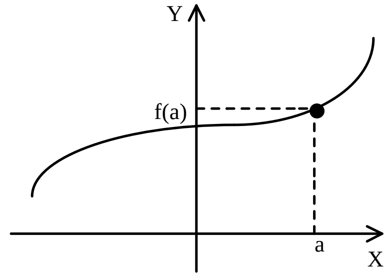
1) beschouw een functie $\bar{f}$ met $\begin{cases} \bar{f}(x) = f(x) & x \neq a \\ \bar{f}(a) = b \end{cases}$

($\bar{f}$ = een uitbreiding van f in a)

2) als $\bar{f}$ continu is in a
dan $\lim_a f(x) = \bar{f}(a) = b$ "limiet"

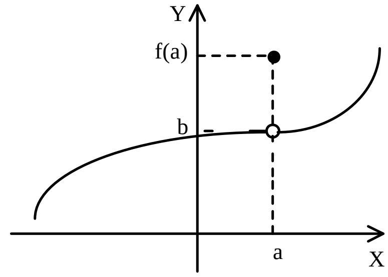
als $\bar{f}$ rechtscontinu is in a
dan $\lim_{a^+} f(x) = \bar{f}(a) = b$ "rechterlimiet"

als $\bar{f}$ linkscontinu is in a
dan $\lim_{a^-} f(x) = \bar{f}(a) = b$ "linkerlimiet"



f is continu in a

$\lim_{a} f(x) = f(a)$

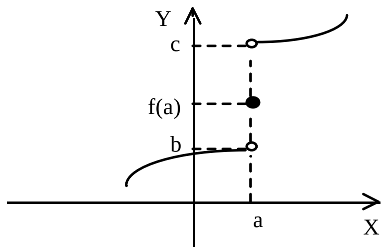


f is discontinu in a

f is niet linkscontinu in a

f is niet rechtscontinu in a

$\lim_{a} f(x) = b$



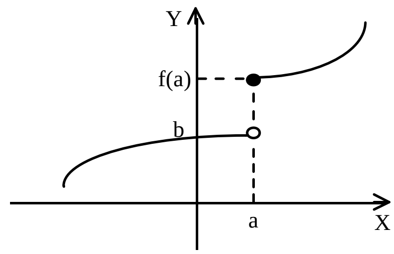
f is discontinu in a

f is niet linkscontinu in a

f is niet rechtscontinu in a

$\lim_{a^+} f(x) = c \neq \lim_{a^-} f(x) = b$

$\Rightarrow \lim_{a} f(x)$ bestaat niet.

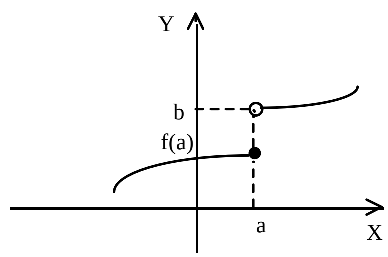


f is discontinu in a

f is rechtscontinu in a

$\lim_{a^+} f(x) = f(a) \neq \lim_{a^-} f(x) = b$

$\Rightarrow \lim_{a} f(x)$ bestaat niet.



f is discontinu in a

f is linkscontinu in a

$\lim_{a^+} f(x) = b \neq \lim_{a^-} f(x) = f(a)$

$\Rightarrow \lim_{a} f(x)$ bestaat niet.

4.2. ε – δ - definitie

4.2.1. limiet, rechterlimiet, linkerlimiet

Als $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dan is:

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \quad \Updownarrow \quad \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \quad 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Verder geldt:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ >}} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: x \in \,]a, a+\delta[\, \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

$$\lim_{\substack{x \to a \\ <}} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: x \in \,]a-\delta, a[\, \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

4.2.2. Oneigenlijke limieten

Het argument neemt onbeperkt toe of af:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists m > 0: x > m \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists m > 0: x < -m \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

Oneindige limieten

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall n > 0, \exists \delta > 0: 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > n$$

$$\lim_{x \to a} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall n > 0, \exists \delta > 0: 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -n$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall n > 0, \exists m > 0: x > m \Rightarrow f(x) < -n$$

4.3. Algemene stellingen

1. Als $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x)=b\\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=b'\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=b+b'$

2. Als $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} r.f(x)=r.\lim\limits_{x\to a} f(x)=r.b$

3. Als $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x)=b\\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=b'\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to a} f(x).g(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x).\lim\limits_{x\to a} g(x)=b.b'$

4. Als $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to a} f(x)=b\\ \lim\limits_{x\to a} g(x)=b'\end{array}\right\}\Rightarrow \lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{b}{b'}$

5. Als $\lim\limits_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

6. Als $\lim\limits_{x\to a}\left[f(x)\right]^n=\left[\lim\limits_{x\to a} f(x)\right]^n$

7. Als $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$

8. Als $\lim\limits_{x\to a} k=k$

(deze stellingen zijn geldig op voorwaarde dat het rechterlid zin heeft)

4.4. Onbepaaldheden

<u>Onbepaalde vorm</u> $\frac{0}{0}$

- rationale functie $\frac{V(x)}{W(x)}$ als $\lim\limits_{x\to a} V(x)=\lim\limits_{x\to a} W(x)=0$, dan betekent dit dat V(x) en W(x) beide deelbaar zijn door (x - a), nl. $V(x)=(x-a).Q_1(x)$, $W(x)=(x-a).Q_2(x)$

Er geldt: $\lim\limits_{x\to a}\frac{V(x)}{W(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{Q_1(x)}{Q_2(x)}$

<u>Voorbeeld</u>.

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6} = \lim_{x \to 2} \frac{(x-2)\,(x+2)}{(x-2)\,(x-3)} = \lim_{x \to 2} \frac{x+2}{x-3} = -4$$

- irrationale breuk: teller en/of noemer rationaal maken.

<u>Voorbeeld</u>.

$$\lim_{x \to 3} \frac{\sqrt{x+1} - 2}{x-3} \qquad = \lim_{x \to 3} \frac{\left(\sqrt{x+1} - 2\right)\left(\sqrt{x+1} + 2\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1} + 2\right)}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{(x+1-4)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1} + 2\right)}$$

$$= \lim_{x \to 3} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 2} = \frac{1}{4}$$

<u>Onbepaalde vorm</u> $\frac{\infty}{\infty}$

- rationale functie

$$\lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_p x^p + b_{p-1} x^{p-1} + \ldots + b_1 x + b_0} = \lim_{x \to \infty} \frac{a_n x^n}{b_p x^p}$$

$= \infty$ als $n > p$ (teken van ∞ nader te bepalen)

$= \frac{a_n}{b_p}$ als $n = p$

$= 0$ als $n < p$

- irrationale breuk: zet in teller en noemer de hoogst mogelijke macht van x voorop.

let op: $\sqrt{x^2} = x$ als $x > 0$

$= -x$ als $x < 0$

Voorbeeld

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+5}+2x}{3x}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2}\left(\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}\right)+2x}{3x}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+2\right)}{3\cancel{x}}=1\\[2ex]\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\cancel{x}\left(-\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+2\right)}{3\cancel{x}}=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

Onbepaalde vorm ∞ - ∞

irrationale functie: vermenigvuldig met en deel door de toegevoegde irrationale vorm.

Voorbeeld.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x-1}+2x\right)$$

a. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x-1}+2x\right)=+\infty$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2+3x-1}+2x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\left(\sqrt{4x^2+3x-1}+2x\right)\left(\sqrt{4x^2+3x-1}-2x\right)}{\sqrt{4x^2+3x-1}-2x}$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-1}{\sqrt{4x^2+3x-1}-2x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x\left(3-\frac{1}{x}\right)}{x\left(-\sqrt{4+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}}-2\right)}=-\frac{3}{4}$$

4.5. Opgaven

1. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{3x-12}$ $\left(\dfrac{8}{3}\right)$

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-4x+3}$ $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^3-1}$ $\left(\dfrac{2}{3}\right)$

4. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^4-a^4}{a^3-x^3}$ $\left(-\dfrac{4}{3}a\right)$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+2x^2-x-2}{x^2+x-2}$ (2)

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{2x^3-2x^2+x-2}$ (0)

7. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{2x^4-2x^3-16x^2+24x}{x^3+x^2-6x}$ (- 10)

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x^4-2x^3-16x^2+24x}{x^3+x^2-6x}$ (- 4)

9. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x-a}$ $\left(m.a^{m-1}\right)$

10. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^m-a^m}{x^n-a^n}$ $\left(\dfrac{m}{n}a^{m-n}\right)$

11. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ $\left(\dfrac{1}{4}\right)$

12. $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ >}}\dfrac{\sqrt{x+6}-\sqrt{3x}}{\sqrt{x-3}}$ (0)

13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}$ (1)

14. $\lim\limits_{\substack{x \to 5 \\ >}} \dfrac{\sqrt{x^2-4x-5}-\sqrt{x^2-25}}{x-5}$ $(-\infty)$

15. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{6x-3}-\sqrt{4x+1}}{\sqrt[3]{x-2}}$ (0)

16. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-2\sqrt{x+3}+3}{\sqrt{x+3}-2}$ (2)

17. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+2x-x^2}}{x^2-2x}$ $\left(-\dfrac{1}{2}\right)$

18. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt[4]{x-2}-1}{\sqrt{x-2}-1}$ $\left(\dfrac{1}{2}\right)$

19. $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ > \\ <}} \left[\dfrac{x-2}{\sqrt{x^3-3x^2+4}}-\dfrac{x-2}{\sqrt[3]{x^3-4x}}\right]$ $\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$

20. Bepaal a zó dat:

$$\lim_{x \to a} \frac{\sqrt{x^2+8ax}-\sqrt{x^2+8a^2}}{x^2+2ax-3a^2}=\frac{a}{12}$$ $(a = +2)$

21. $\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ > \\ <}} \left[\dfrac{2}{x^2-3x+2}-\dfrac{3}{x^2-1}\right]$ $(\mp\infty)$

22. $\lim\limits_{x \to 2} \left[\dfrac{x+8}{x^2+x-6}-\dfrac{6}{x^2-x-2}\right]$ $\left(\dfrac{7}{15}\right)$

23. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x+\dfrac{x+1}{x+3}}{1+\dfrac{x^2}{x^2+4x+3}}$ $\left(\dfrac{4}{9}\right)$

24. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{2x+3}-\sqrt{x^2+1}}{x-2}$ (-1)

25. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt[3]{8x^3+2x}-\sqrt{x^2-4}}{\sqrt[3]{x+1}+x}$ $(1; 3)$

26. $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\sqrt[3]{1-8x^3}}{x+1}$ (-2)

27. $\lim\limits_{x \to \infty}\left(3x-\sqrt{x^2-x+4}\right)$ $(\pm \infty)$

28. $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\sqrt[3]{x^3+3x^2+1}-x\right)$ (1)

29. $\lim\limits_{x \to \infty}\left(x+1-\sqrt{4x^2+x+1}\right)$ $(- \infty)$

30. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\right)$ $\left(\frac{1}{2}\right)$

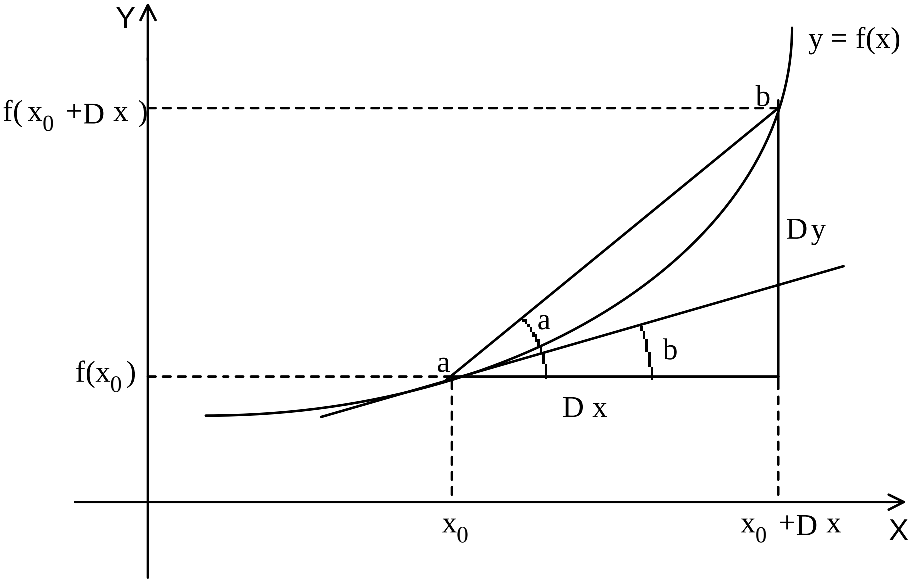
31. $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+4}+\sqrt{9x^2-1}-4x\right)$ $(+ \infty)$

32. $\lim\limits_{x \to \infty}\left(\frac{2x^3-x^2-8x+4}{x^2-4}-\sqrt{4x^2+5x-1}\right)$ $\left(-\infty, -\frac{9}{4}\right)$

33. $\lim\limits_{x \to \infty} x\left(\sqrt{x^2+5x+8}-\sqrt{x^2+5x-4}\right)$ (± 6)

5. Afgeleiden

5.1. Afgeleide van een functie in een punt (x_0, y_0)



Beschouw:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Als deze limiet bestaat, wordt hij de <u>afgeleide</u> genoemd van de functie in x_0.

Notatie: $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

<u>Meetkundige betekenis:</u>

Beschouw de kromme met vergelijking y = f(x), $a(x_0, f(x_0))$ en $b(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ zijn 2 naburige punten van de kromme.Dan is de richtingscoëfficiënt van de koorde ab: $m_{ab} = \dfrac{y_b - y_a}{x_b - x_a} = \dfrac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{(x_0 + \Delta x) - x_0} = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \operatorname{tg} \alpha$

Laat men de rechte ab wentelen om a zodat het punt b onbeperkt tot a nadert, dan gaat de rechte ab over in de raaklijn in a (aan de kromme).

$\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ b \to a}} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\alpha \to \beta} \operatorname{tg} \alpha = \operatorname{tg} \beta$, m.a.w. $f'(x_0)$ is de richtingscoëfficiënt van de raaklijn in het punt $(x_0, f(x_0))$ aan de kromme y = f(x).

Voorbeeld.

$$y = x^2 - 3x + 4$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - 3(x_0 + \Delta x) + 4 - x_0^2 + 3x_0 - 4}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x - 3) = 2x_0 - 3$$

Zo is voor $x_0 = 1$; $f'(1) = -1$. Bijgevolg is b = 135°.

5.2. Linker- en rechterafgeleide

Men noemt $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ >}} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, resp. $\lim\limits_{\substack{\Delta x \to 0 \\ <}} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, de rechter-, resp. linkerafgeleide van f(x) in het beschouwde punt, op voorwaarde dat de limiet bestaat.

Het kan gebeuren dat linker- en rechterafgeleide in een punt verschillend zijn. Meetkundig betekent dit dat de kromme een hoekpunt (knik) heeft, zodat de kromme in dat punt 2 verschillende raaklijnen heeft. De functie is dan niet afleidbaar in dat beschouwde punt.

Voorbeeld

$y = \left| \frac{1}{4} x^2 - 1 \right|$ is continu voor elke waarde van x, maar de rechterafgeleide voor x = 2, is verschillend van de linkerafgeleide in dat punt, nl.

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} f'(x) = 1$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} f'(x) = -1$$

Besluit:

f continu in $x = x_0 \not\Rightarrow f$ afleidbaar in $x = x_0$.

Maar men bewijst dat,

f afleidbaar in $x = x_0 \Rightarrow f$ continu in $x = x_0$

5.3. Verticale raaklijn

Voorbeeld.

De functie $y = \sqrt[3]{x}$ is continu voor elke waarde van x.

We berekenen de afgeleide voor x = 0

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x^2}} = +\infty$$

De functie is dus niet afleidbaar voor x = 0. Men spreekt van een oneigenlijke afgeleide. Meetkundig betekent dit dat tg a = + ∞, zodat a = 90°. De raaklijn valt dus samen met de y-as.

5.4. Regels voor de berekening van de afgeleide functies

1. afgeleide van een constante

$$y = k \Rightarrow y' = 0$$

2. afgeleide van het argument

$$y = x \Rightarrow y' = 1$$

3. afgeleide van een som van functies

$$y = u + v + w \Rightarrow y' = u' + v' + w'$$

4. afgeleide van een product van functies

$$y = u.v \Rightarrow y' = u'.v + u.v'$$

5. afgeleide van een quotiënt van functies

$$y = \frac{u}{v} \Rightarrow y' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$$

6. afgeleide van een macht

$$y = u^n \Rightarrow y' = n.u^{n-1}.u'$$

7. afgeleide van de samengestelde van 2 functies

$$D_x\left[(g \circ f)(x)\right] = D_z\ g(z)\ .\ D_x\ f(x)$$

8. afgeleide van goniometrische functies

$$y = \sin x \Rightarrow y' = \cos x$$

$$y = \cos x \Rightarrow y' = -\sin x$$

$$y = \operatorname{tg} x \Rightarrow y' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$y = \operatorname{cotg} x \Rightarrow y' = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

5.5. Opgaven

1. $y = x^3 - x^2 - x + 1$ $\qquad \left(y' = 3x^2 - 2x - 1\right)$

2. $y = \frac{1}{8}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - 4$ $\qquad \left(y' = \frac{3}{8}x^2 + \frac{3}{2}x\right)$

3. $y = \left(x^2 - 4x + 3\right)^2$ $\qquad \left(y' = 2\left(x^2 - 4x + 3\right)(2x - 4)\right)$

4. $y = x^3(x + 6)^2(x + 3)$ $\qquad \left(y' = 3x^2\ (x + 6)\ \left(2x^2 + 13x + 18\right)\right)$

5. $y = \dfrac{2,5}{-5 + 3x - \frac{1}{2}x^2}$ $\qquad \left(y' = \dfrac{2,5x - 7,5}{\left(-5 + 3x - \frac{1}{2}x^2\right)^2}\right)$

6. $y = \dfrac{2x^2 - 3}{x^2 - 2x + 2}$ $\qquad \left(y' = \dfrac{-4x^2 + 14x - 6}{\left(x^2 - 2x + 2\right)^2}\right)$

7. $y = \dfrac{x^2 - 5x + 7}{x - 2}$ $\qquad \left(y' = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{(x - 2)^2}\right)$

8. $y = \dfrac{x\ (x + 2)}{x^2 - 1}$ $\qquad \left(y' = \dfrac{-2\left(x^2 + x + 1\right)}{\left(x^2 - 1\right)^2}\right)$

9. $y = \frac{1}{3}x^3 + x + \frac{2}{x}$ $\qquad \left(y' = x^2 + 1 - \frac{2}{x^2}\right)$

10. $y = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ $\qquad \left(y' = \dfrac{x^2\left(x^2 - 3\right)}{\left(x^2 - 1\right)^2}\right)$

11. $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ $\qquad \left(y' = \dfrac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\right)$

12. $y = x + \sqrt{18 - x^2}$ $\left(y' = \dfrac{\sqrt{18 - x^2} - x}{\sqrt{18 - x^2}} \right)$

13. $y = \sqrt{x^3 + 3x^2}$ $\left(y' = \dfrac{3x^2 + 6x}{2\sqrt{x^3 + 3x^2}} \right)$

14. $y = \sqrt{2x^3 + 5x - 5}$ $\left(y' = \dfrac{6x^2 + 5}{2\sqrt{2x^3 + 5x - 5}} \right)$

15. $y = 4x - 1 - \sqrt{x^2 - x - 2}$ $\left(y' = 4 - \dfrac{2x - 1}{2\sqrt{x^2 - x - 2}} \right)$

16. $y = (2x - 1)\sqrt{4 - x^2}$ $\left(y' = 2\sqrt{4 - x^2} - \dfrac{x(2x - 1)}{\sqrt{4 - x^2}} \right)$

17. $y = (x + 1)^2 \sqrt{x^2 - 4x + 3}$ $\left(y' = \dfrac{(x + 1)\left(3x^2 - 9x + 4\right)}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}} \right)$

18. $y = \sqrt[3]{5x^2 - 4x + 1}$ $\left(y' = \dfrac{2(5x - 2)}{3\sqrt[3]{\left(5x^2 - 4x + 1\right)^2}} \right)$

19. $y = \left(5x^2 - 6x + 4\right)\sqrt[4]{\left(x^2 + 2\right)^3}$ $\left(y' = \dfrac{35x^3 - 30x^2 + 52x - 24}{2\sqrt[4]{x^2 + 2}} \right)$

20. $y = \dfrac{\sqrt{x + 5}}{x}$ $\left(y' = -\dfrac{x + 10}{2x^2\sqrt{x + 5}} \right)$

21. $y = \dfrac{2x^2 - 3x + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$ $\left(y' = \dfrac{4x^3 - 6x^2 + 9x - 5}{2\left(x^2 - x + 1\right)\sqrt{x^2 - x + 1}} \right)$

22. $y = \dfrac{3x}{\sqrt{(1 + 2x)^5}}$ $\left(y' = \dfrac{3(1 - 3x)}{\sqrt{(1 + 2x)^7}} \right)$

23. $y = \sqrt{\dfrac{(x-1)\,(x-2)}{(x-3)\,(x-4)}}$ $\left(y' = \dfrac{-2x^2 + 10x - 11}{\sqrt{(x-1)\,(x-2)\,(x-3)^3\,(x-4)^3}} \right)$

24. $y = \dfrac{\left(2-3x^2\right)\sqrt{x^2-9}}{4x^2}$ $\left(y' = \dfrac{-3x^4 - 2x^2 + 36}{4x^3\,\sqrt{x^2-9}} \right)$

25. $y = \dfrac{(2x-1)^2\,\sqrt[3]{x^3-2}}{(x+2)^3}$ $\left(y' = \dfrac{(2x-1)\left(14x^3 - 2x^2 + 4x - 22\right)}{(x+2)^4\,\sqrt[3]{\left(x^3-2\right)^2}} \right)$

26. $y = 4\sin^2 x$ $\left(y' = 4\sin 2x \right)$

27. $y = \cos 2x - 5\cos x - 2$ $\left(y' = -2\sin 2x + 5\sin x \right)$

28. $y = \cos^2 \dfrac{x}{2}$ $\left(y' = -\sin\dfrac{x}{2} \,.\, \cos\dfrac{x}{2} \right)$

29. $y = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$ $\left(y' = \dfrac{-2}{\left(\sin x - \cos x\right)^2} \right)$

30. $y = x - \sin x$ $\left(y' = 1 - \cos x \right)$

31. $y = \sin 2x - 2\sin x$ $\left(y' = 2\cos 2x - 2\cos x \right)$

32. $y = \sqrt{\cos x}$ $\left(y' = \dfrac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} \right)$

33. $y = \sqrt[3]{\cos^2 4x}$ $\qquad \left(y' = \dfrac{-8 \sin 4x}{3\sqrt[3]{\cos 4x}} \right)$

34. $y = 4\cos 3x + 3\sin 4x$ $\qquad (y' = -12\sin 3x + 12\cos 4x)$

35. $y = \cos x + \sec 2x$ $\qquad (y' = -\sin x + 2\operatorname{tg} 2x \sec 2x)$

36. $y = \dfrac{\cos 2x}{\sin x}$ $\qquad \left(y' = \dfrac{-2\sin x \sin 2x - \cos x \cos 2x}{\sin^2 x} \right)$

37. $y = \dfrac{\sin x \,.\, \cos x}{\sqrt{3\cos^2 x - 2\sin^2 x}}$ $\qquad \left(y' = \dfrac{3\cos^4 x + 2\sin^4 x}{(3\cos^2 x - 2\sin^2 x)\sqrt{3\cos^2 x - 2\sin^2 x}} \right)$

6. Onbepaalde integraal

6.1. Primitieve functies

Definitie

Een primitieve functie F(x) van de functie f(x) is elke functie met de eigenschap F'(x) = f(x).

Eigenschap 1

Is F(x) een primitieve functie van f(x), dan is ook F(x) + k, $k \in \mathbb{R}$, een primitieve functie van f(x).

Eigenschap 2

Als $F_1(x)$ en $F_2(x)$ primitieve functies zijn van f(x) dan verschillen $F_1(x)$ en $F_2(x)$ slechts door een constante term.

Besluit

Is F(x) een primitieve functie van f(x), dan worden alle primitieve functies van f(x) gevonden door bij F(x) een willekeurig reëel getal op te tellen.

6.2. Onbepaalde integraal

De onbepaalde integraal van een functie f(x) is de verzameling van alle primitieve functies van f(x).

Notatie:

$$\int f(x)\,dx = \{F(x) + k \mid F'(x) = f(x) \text{ en } k \in IR\}$$

kortweg noteert men

$$\int f(x)\,dx = F(x) + k$$

6.3. Eigenschappen

1. $\int k\, f(x)\,dx = k \int f(x)\,dx$
2. $\int \big(f(x) + g(x)\big)\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

6.4. Fundamentele integralen

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + k, \text{ als } n \neq -1$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x + k$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x + k$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg } x + k$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{cotg } x + k$$

6.5. Substitutiemethode

De substitutiemethode is gebaseerd op de formule:

$$\int f\big(g(x)\big)\, g'(x)\,dx = \int f(t)\,dt \text{ met } g(x) = t$$

6.6. Opgaven

Bereken de onbepaalde integraal met integrand gelijk aan:

1. $\sqrt[3]{x}$ $\left(\frac{3}{4}\, x \sqrt[3]{x} + k\right)$

2. $\sqrt[4]{x^3}$ $\left(\frac{4}{7}\, x \sqrt[4]{x^3} + k\right)$

3. $x \sqrt{x}$ $\left(\frac{2}{5}\, x^2 \sqrt{x} + k\right)$

4. $x^3 \sqrt[5]{x^2}$ $\left(\frac{5}{22} x^4 \sqrt[5]{x^2} + k\right)$

5. $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ $\left(\frac{3}{2} \sqrt[3]{x^2} + k\right)$

6. $\frac{1}{x^9}$ $\left(-\frac{1}{8x^8} + k\right)$

7. $\frac{\sqrt[4]{x^3}}{\sqrt[3]{x^2}}$ $\left(\frac{12}{13}\, x \sqrt[12]{x} + k\right)$

8. $2x + 7$ $\left(x^2 + 7x + k\right)$

9. $\sin x + \cos x$ $(-\cos x + \sin x + k)$

10. $\frac{7}{2\cos^2 x}$ $\left(\frac{7}{2}\, \mathrm{tg}\, x + k\right)$

11. $\frac{1}{1 - \cos 2x}$ $\left(-\frac{1}{2}\, \mathrm{cotg}\, x + k\right)$

12. $\frac{5x^2 - 8x + 3}{x^5}$ $\left(-\frac{5}{2x^2} + \frac{8}{3x^3} - \frac{3}{4x^4} + k\right)$

13. $\dfrac{1-\cos^3 x}{\cos^2 x}$	$\tan x - \sin x + k$
14. $\sqrt{1+\cos 2x}$	$(\pm\sqrt{2}\sin x + k)$
15. $(x+3)^5$	$\left(\dfrac{(x+3)^6}{6} + k\right)$
16. $\cos 2x$	$\left(\dfrac{1}{2}\sin 2x + k\right)$
17. $\cos^2 x$	$\left(\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{4}\sin 2x + k\right)$
18. $\sin^2 x$	$\left(\dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\sin 2x + k\right)$
19. $(x-5)^4$	$\left(\dfrac{(x-5)^5}{5} + k\right)$
20. $\sqrt{x+6}$	$\left(\dfrac{2}{3}(x+6)\sqrt{x+6} + k\right)$
21. $\dfrac{4}{\sqrt{x-5}}$	$(8\sqrt{x-5} + k)$
22. $\sin 3x$	$\left(-\dfrac{1}{3}\cos 3x + k\right)$
23. $(2x-7)^5$	$\left(\dfrac{(2x-7)^6}{12} + k\right)$
24. $\sqrt{3x+4}$	$\left(\dfrac{2}{9}(3x+4)\sqrt{3x+4} + k\right)$
25. $\dfrac{1}{\cos^2 4x}$	$(\dfrac{1}{4}\tan 4x + k)$
26. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3x-1}}$	$\left(\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{(3x-1)^2} + k\right)$
27. $(x-2)\sqrt{x-2}$	$\left(\dfrac{2}{5}(x-2)^2\sqrt{x-2} + k\right)$

28. $(x+3)\sqrt{2x+6}$ $\left(\frac{2}{5}(x+3)^2\sqrt{2x+6}+k\right)$

29. $\sin^3 x$ $\left(-\cos x+\frac{\cos^3 x}{3}+k\right)$

30. $\cos^3 x$ $\left(\sin x-\frac{\sin^3 x}{3}+k\right)$

31. $\sin 2x \, . \cos x$ $\left(-\frac{2}{3}\cos^3 x+k\right)$

32. $\cos^4 x$ $\left(\frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+k\right)$

33. $\sin^4 x$ $\left(\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+k\right)$

34. $\frac{1}{1+\cos x}$ $(\tan\frac{x}{2}+k)$

35. $x\sqrt{x+3}$ $\left(\frac{2}{5}\left(x^2+x-6\right)\sqrt{x+3}+k\right)$

36. $x^2\sqrt{x-1}$ $\left(\frac{2}{105}(x-1)\left(15x^2+12x+8\right)\sqrt{x-1}+k\right)$

37. $(x+3)\sqrt[3]{x+2}$ $\left(\frac{3}{28}(x+2)(4x+15)\sqrt[3]{x+2}+k\right)$

38. $\frac{x+2}{\sqrt{3x-1}}$ $\left(\frac{2}{27}(3x+20)\sqrt{3x-1}+k\right)$

6.7. Partiële integratie

Vermits

$$udv = d(uv) - (du)v$$

is

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

Deze formule ligt aan de basis van de partiële integratie.

6.8. Opgaven

Bereken de onbepaalde integralen met integrand gelijk aan:

1. $x^2.\cos x$ $\quad\left(x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + k\right)$

2. $x.\cos x$ $\quad\left(x \sin x + \cos x + k\right)$

3. $x^3 \sin x$ $\quad\left(-x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + k\right)$

4. $\cos^2 x$ $\quad\left(\frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \sin x.\cos x + k\right)$

5. $\cos^3 x$ $\quad\left(\frac{1}{3} \cos^2 x.\sin x + \frac{2}{3} \sin x + k\right)$

6. $x.\sin x.\cos x$ $\quad\left(-\frac{1}{4} x.\cos 2x + \frac{1}{8} \sin 2x + k\right)$

7. $x.\cos^2 x$ $\quad\left(\frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} x \sin 2x + \frac{1}{8} \cos 2x + k\right)$

7. Bepaalde integraal

7.1. Grondstelling

Is $\int f(x)dx = F(x) + k$, dan is $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$.

Merk op de bepaalde integraal is een getal.

7.2. Integratiemethoden

7.2.1. Substitutiemethode

Voorbeeld.

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin 2x \ dx$$

- eerste methode: eerst de onbepaalde integraal oplossen

$$\int \sin 2x \ dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x \ d(2x) = -\frac{1}{2}\cos 2x + k$$

zodat $I = -\frac{1}{2}[\cos 2x]_0^{\pi/2} = -\frac{1}{2}(-1-1) = 1$

- tweede methode: aanpassen van de integratiegrenzen, bij het doorvoeren van de substitutie

$$I = \int_0^{\pi/2} \sin 2x \ dx$$

stel 2x = t dan is 2dx =dt

en voor $\begin{cases} x = 0 & \text{is } t = 0 \\ x = \dfrac{\pi}{2} & \text{is } t = \pi \end{cases}$

bijgevolg is: $I = \int_0^{\pi} \sin t.\frac{1}{2} dt = -\frac{1}{2}\cos t \Big|_0^{\pi} = -\frac{1}{2}(\cos \pi - \cos 0) = 1$

7.2.2. Partiële integratie

$$\int_a^b u\,dv = uv\,\Big|_a^b - \int_a^b v\,du$$

<u>Voorbeeld.</u>

$$I = \int_1^2 x\,\sqrt{x-1}\,dx$$

$$u = x \to du = dx$$

$$dv = \sqrt{x-1}\,dx \quad \Rightarrow \quad v = \int \sqrt{(x-1)}\,d(x-1) = \frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3}$$

$$I = \frac{2}{3}\,x\,\sqrt{(x-1)^3}\,\Big|_1^2 - \frac{2}{3}\int_1^2 \sqrt{(x-1)^3}\,dx$$

$$\frac{2}{3}(2-0) - \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{5}\sqrt{(x-1)^5}\,\Big|_1^2 = \frac{4}{3} - \frac{4}{15}(1-0) = \frac{16}{15}$$

7.3. Opgaven

1. $\int_{1}^{3} x \, dx$ (4)

2. $\int_{-2}^{2} \left(3x^2 - 2x + 4\right) dx$ (32)

3. $\int_{0}^{\pi} \sin x \, dx$ (2)

4. $\int_{1}^{2} \frac{1}{x^2} \, dx$ $\left(\frac{1}{2}\right)$

5. $\int_{\pi}^{2\pi} \cos^2 x \, dx$ $\left(\frac{\pi}{2}\right)$

6. $\int_{0}^{1} \sqrt{1 - x^2} \, dx$ $\left(\frac{\pi}{4}\right)$

7. $\int_{-5}^{-1} x \sqrt{x + 5} \, dx$ $\left(-\frac{208}{15}\right)$

8. $\int_{-2}^{2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 5}} \, dx$ (0)

9. $\int_{0}^{\pi} \cos^2 x \sin^3 x \, dx$ $\left(\frac{4}{15}\right)$

10. $\int_{0}^{\pi/2} \cos x \sin^3 x \, dx$ $\left(\frac{1}{4}\right)$